

# き裂の高精度計測を目指した非線形超音波法 に対する数値シミュレーション

丸山泰蔵

理工学研究科 生産環境工学専攻

# 自己紹介

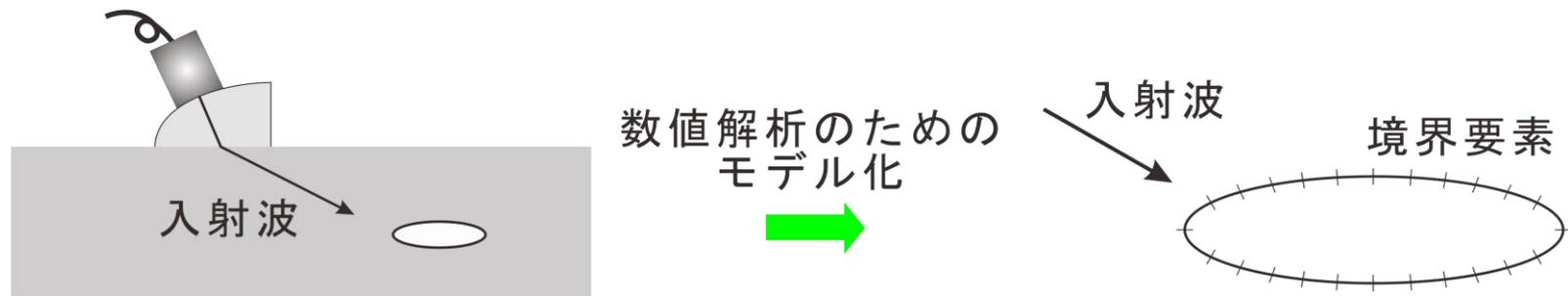
名前：丸山 泰蔵（まるやま たいぞう）

学位：博士（工学）

- 2016年3月：東京工業大学 情報理工学研究科 博士課程修了
- 2016年4月～2019年9月：東京理科大学 理工学部 土木工学科 助教
- 2019年10月～：愛媛大学 理工学研究科 生産環境学専攻 講師

所属学会：土木学会，日本非破壊検査協会，日本計算数理工学会

専門分野：応用力学，計算力学，非破壊検査

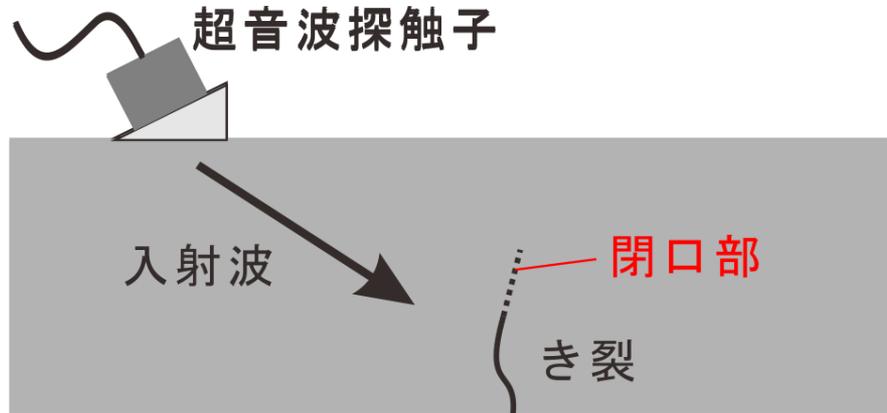


- 波動解析のための境界要素法の高精度化・高速化
- 複雑現象のための数値解析手法の開発

# 従来の超音波を用いた非破壊検査の問題点

## 通常の線形超音波法

(音響インピーダンスの差異による散乱波を利用)

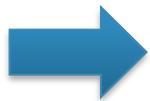


- 母材-き裂開口部 (空気) の音響インピーダンス差によって散乱波が発生
- き裂閉口部は弾性波がそのまま透過

き裂閉口部からの散乱波の受信は困難

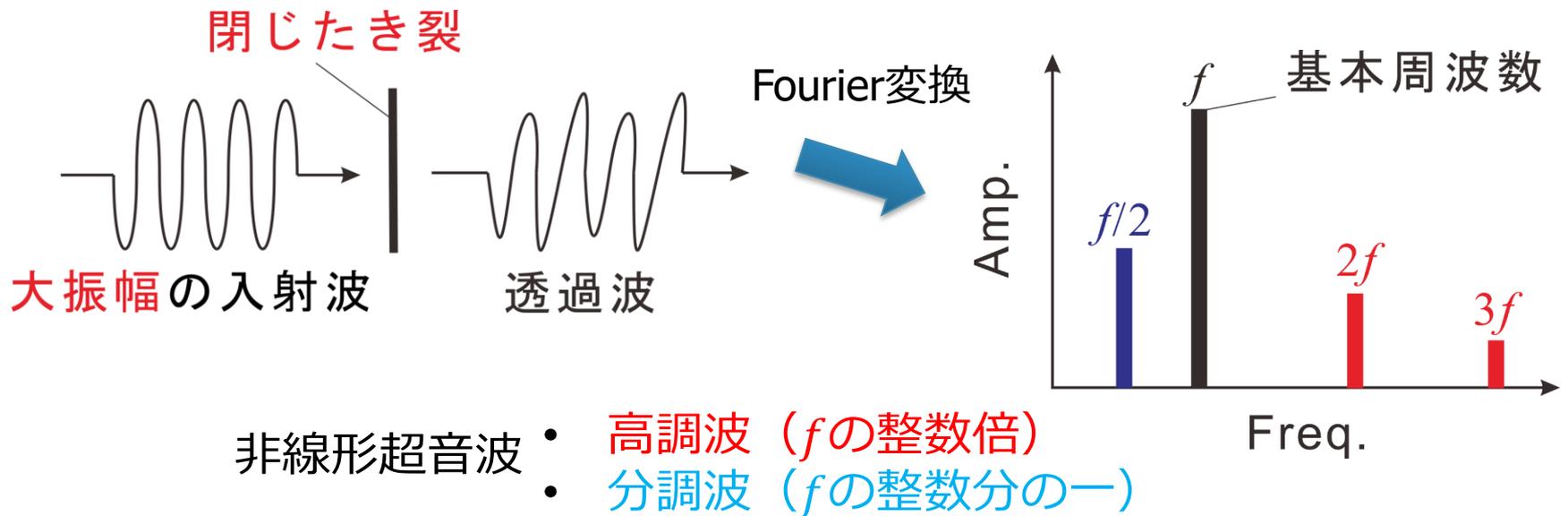
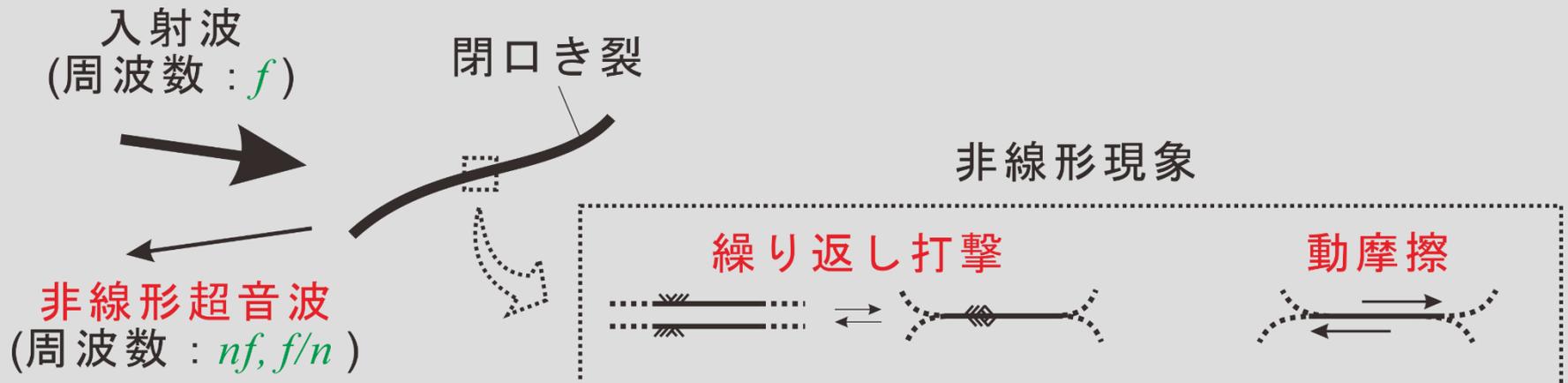
- 小さい初期き裂の見落とし
- き裂深さの過小評価

が懸念される

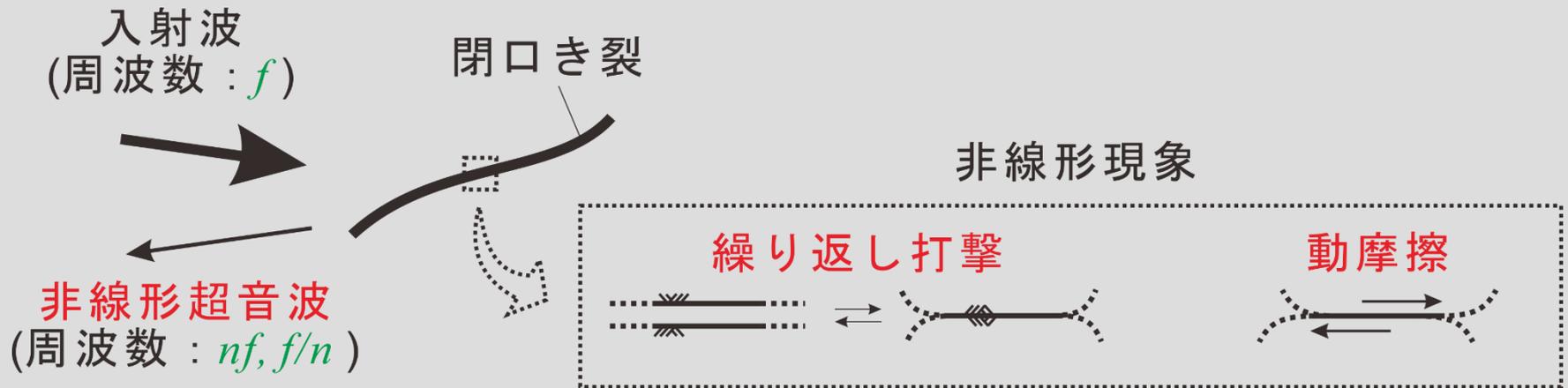


き裂閉口部を検出・計測できる手法の開発が望まれている

# 接触音響非線形性を用いた非線形超音波法



# 接触音響非線形性を用いた非線形超音波法

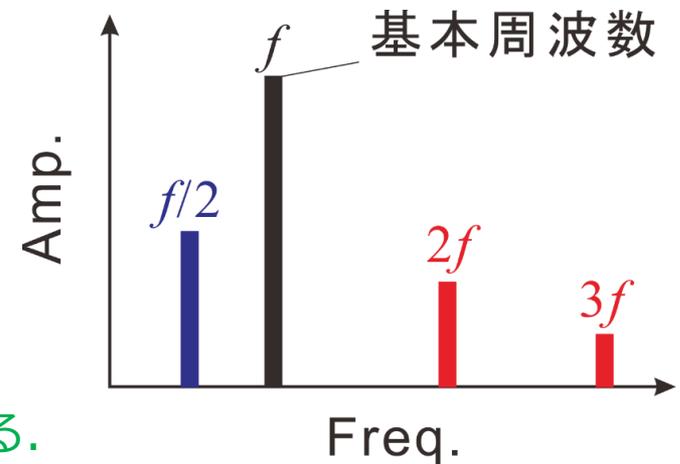


## 非線形超音波

- 高調波 ( $f$ の整数倍)
- 分調波 ( $f$ の整数分の一)

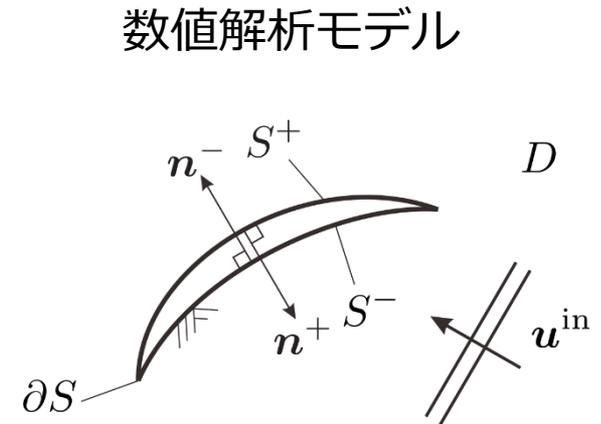
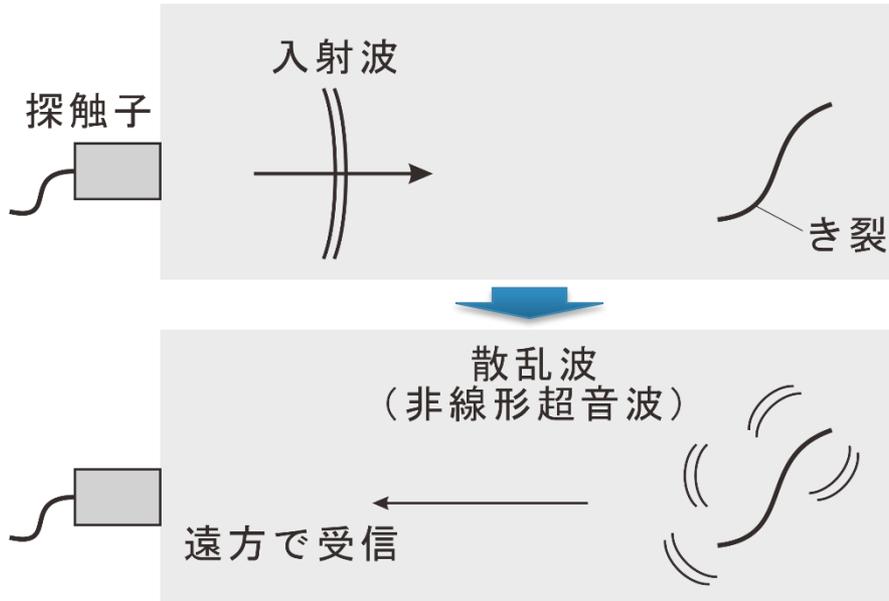
受信波の周波数成分を解析することによって、き裂の検出・サイズ測定を行う

検査の高度化のためには現象の理解が不可欠である。  
数値シミュレーションはその一助となる。



- 研究の背景
- 非定常シミュレーション
  - 解析手法の概要
  - 解析結果
- 定常シミュレーション
  - 解析手法の概要
  - 解析結果
- まとめ・今後の課題

# 数値解析モデル



## 解析を行う内容

- 無限領域中のき裂に超音波を入射したときの散乱問題
  - き裂が及ぼす影響のみを調べる
- き裂から遠方における散乱波を計算
  - 通常、波長やき裂のサイズに対して遠くで受信することが多い
  - き裂の近くでは波動場が複雑である



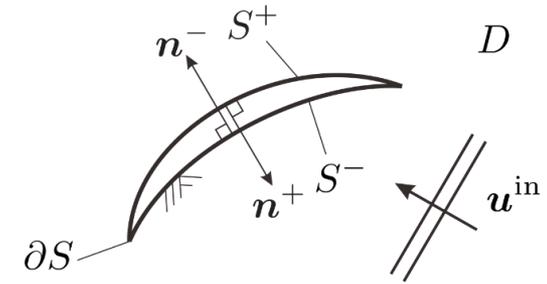
無限領域、き裂面における境界条件の取り扱い易さ等の理由から、時間領域境界要素法を用いる

# き裂による弾性波動散乱問題

## 無限領域 $D$ に存在するき裂による散乱問題

- 領域 $D$ は均質, 等方かつ線形な弾性体と仮定
- 物体力は無視

$$c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in D$$



本問題における境界・初期条件 (以下の条件に加えて動的接触条件が必要)

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{x}, t) + \mathbf{t}^-(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in S \quad \text{き裂面を越える表面力の連続性 } (S = S^+ \cup S^-)$$

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) (\equiv \mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \partial S \quad \text{き裂縁での開口変位はゼロ}$$

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in D \quad t = 0 \text{以前に散乱波は存在しない (静止過去)}$$

- き裂面における境界条件が時刻と共に変化する非線形問題
- 領域 $D$ における波動場は線形 (重ね合わせの原理が成り立つ)

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) = - \int_0^t \int_{S^+} \mathbf{T}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot [\mathbf{u}^{\text{sc}}](\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \quad \mathbf{x} \in D$$

$c_L, c_T$ :  $D$ 中におけるP波, S波の波速,  $\mathbf{t}$ : 表面力,  $[\mathbf{u}]$ : き裂開口変位,

$\mathbf{T}$ : 時間領域弾性波動問題に対する二重層核, 上付きsc: 散乱波に対応

# き裂面での接触を考慮した数理モデル

## 3つの状態を考慮したき裂モデル

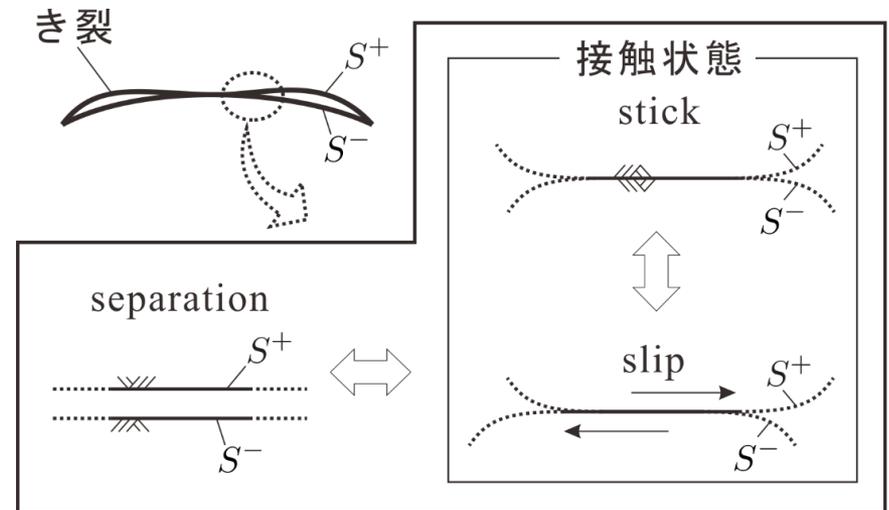
き裂面の開閉口

separation + stick

摩擦を伴う滑り

stick + slip

クーロンの摩擦法則



### separation

- ・ 向かい合うき裂面が**非接触**である状態

### stick contact

- ・ 向かい合うき裂面が接触し、**固着している**状態

### slip contact

- ・ 向かい合うき裂面が接触し、**接線方向に滑っている**状態

# 境界条件の遷移について

$$[u_n] = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}, \quad [u_s] = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{s}, \quad t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad t_s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{s}$$

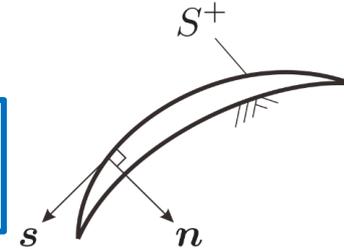
## Separation



$\mu_s$ : 静止摩擦係数  
 $\mu_d$ : 動摩擦係数  
 $g$ : 初期開口変位

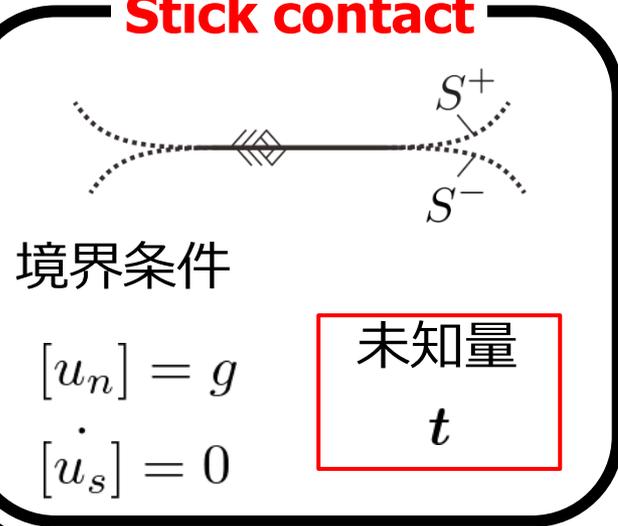
き裂面が交差する  
 $[u_n] \geq g$

開口方向に表面力が作用  
 $t_n > 0$



## 接触状態

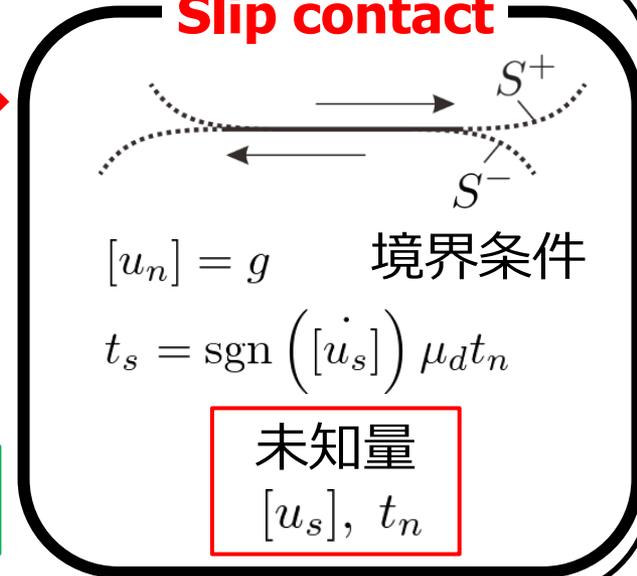
## Stick contact



接線方向表面力が  
 静止摩擦力を超過  
 $|t_s| \geq \mu_s |t_n|$

滑りが停止  $[u_s] = 0$

## Slip contact



# 高調波シミュレーションの解析モデル

## 材料定数 (鋼材を想定)

ポアソン比:  $\nu = 0.3$

静止・動摩擦係数:  $\mu_s = 0.74, \mu_d = 0.57$

## 計算パラメータ

$$k_T a = (2\pi a f^{\text{in}})/c_T = 3.0, \quad g/u_0 = 0.0$$

30周期の正弦バースト波形を有する平面縦波, もしくは横波

$$\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \mathbf{d}_\varphi \sin(2\pi \Lambda_\varphi) H(\Lambda_\varphi) H(30 - \Lambda_\varphi)$$

$$\Lambda_\varphi = f^{\text{in}} \left( t - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})}{c_\varphi} \right)$$

$$\varphi = L \text{ or } T$$

$f^{\text{in}}$ : 中心周波数

$\mathbf{d}_\varphi, \mathbf{p}$ : 振動, 伝搬方向ベクトル

$u_0$ : 入射波の振幅

$\sigma_0$ : 入射波の振幅に対応する応力

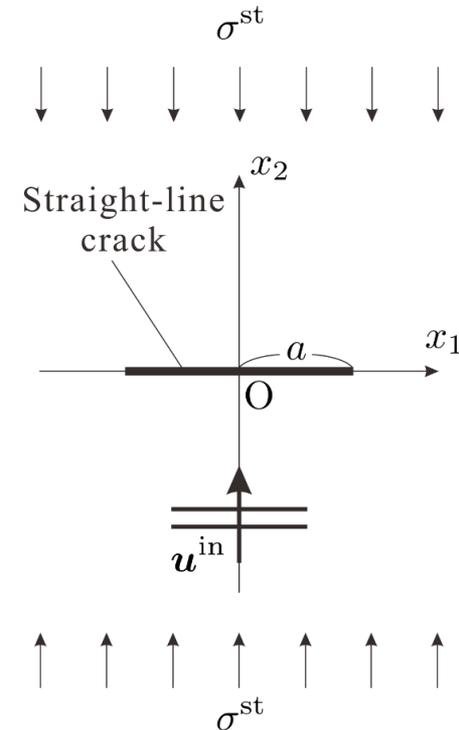
示す数値解析例

1. 縦波垂直入射 (静的な圧縮応力  $\sigma^{\text{st}}/\sigma_0 = 0.0$ )
2. 横波垂直入射 (静的な圧縮応力  $\sigma^{\text{st}}/\sigma_0 = 1.0$ )

受信波として, 遠方散乱波を評価する

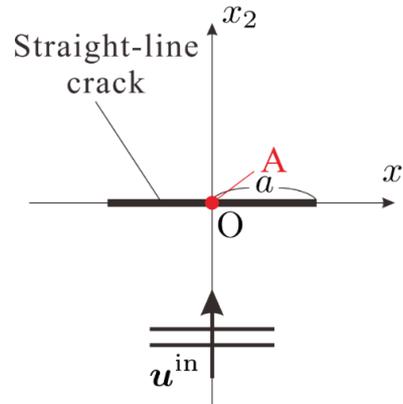
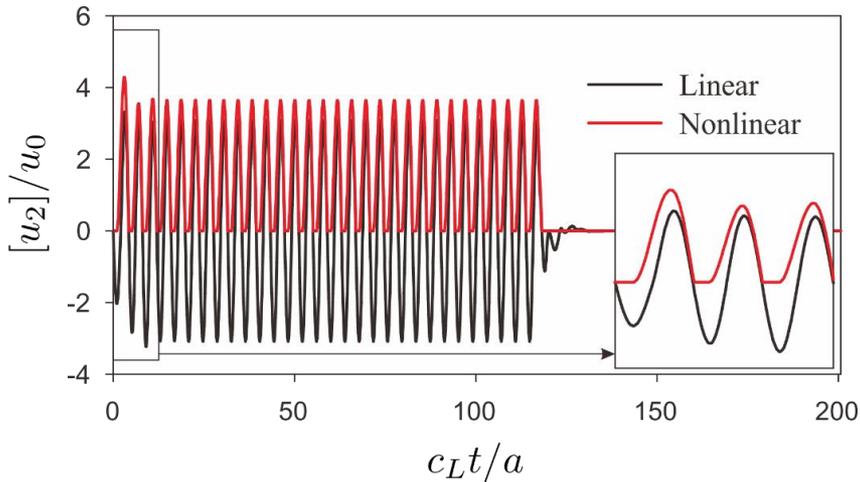
$$u_\varphi^{\text{far}}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{8\pi x}} \Omega_\varphi \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_\varphi} \right)$$

縦波または横波に対する遠方散乱振幅  
(開口変位の速度に依存する関数)



# 縦波垂直入射の結果

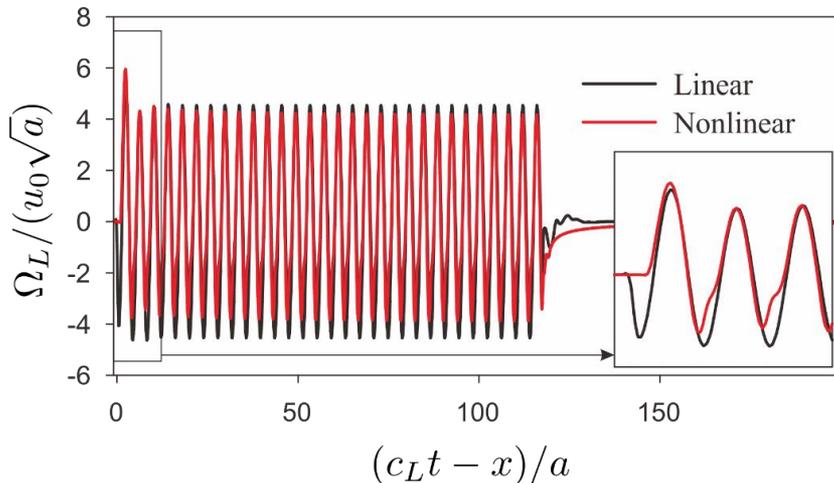
点Aにおける垂直方向の開口変位



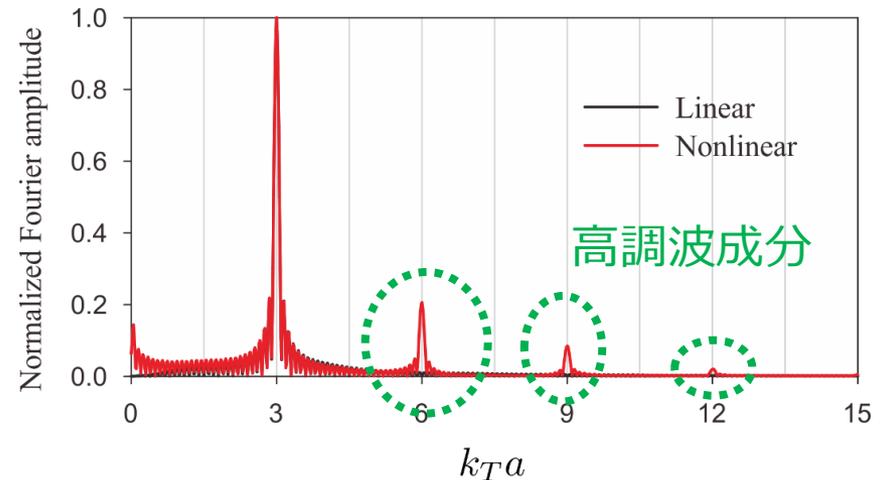
- 接触を考慮した場合、開口変位が**負の値を取らない**
- 開口変位波形が**半波整流**に近い波形となっている

初期開口変位：  
 $g/u_0 = 0.0$   
 静的な圧縮応力：  
 $\sigma^{st}/\sigma_0 = 0.0$

後方散乱振幅の時刻歴波形

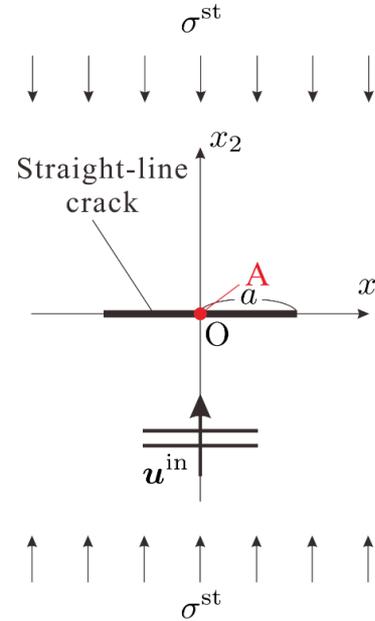
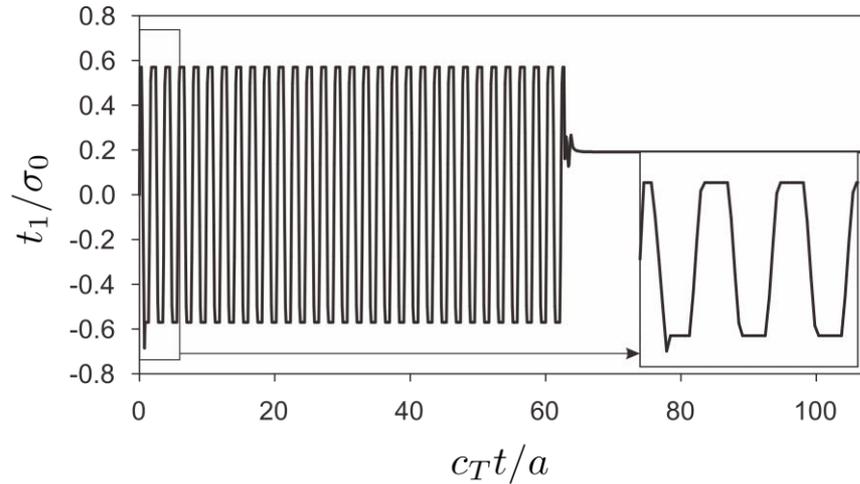


正規化されたフーリエスペクトル



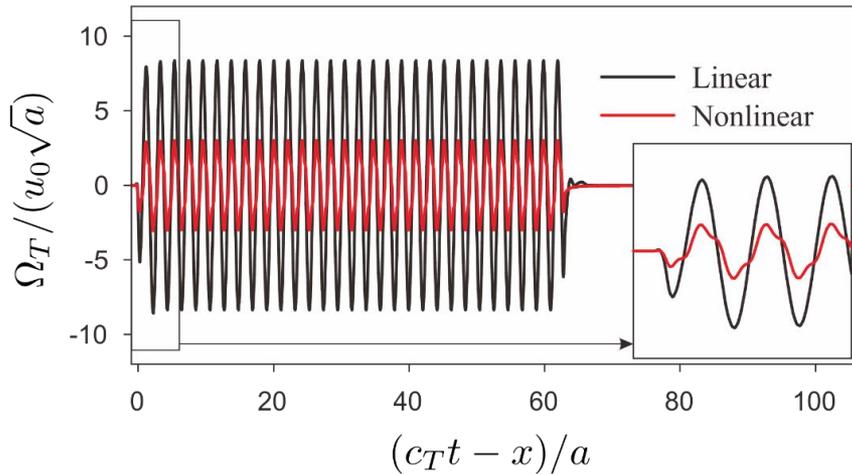
# 横波垂直入射の結果

点Aにおける接線方向の表面力

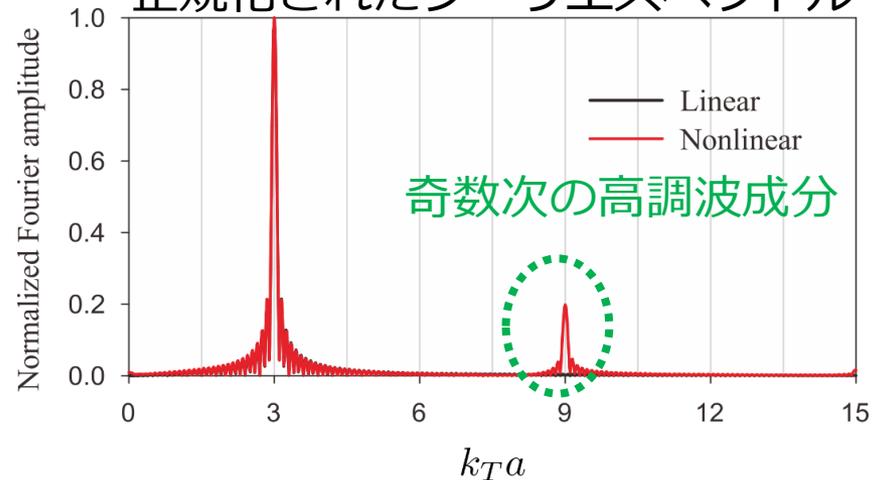


初期開口変位：  
 $g/u_0 = 0.0$   
 静止・動摩擦係数：  
 $\mu_s = 0.74, \mu_d = 0.57$   
 静的な圧縮応力：  
 $\sigma^{st}/\sigma_0 = 1.0$

後方散乱振幅の時刻歴波形



正規化されたフーリエスペクトル



奇数次の高調波成分

# 分調波シミュレーションの解析モデル

## 材料定数 (鋼材を想定)

ポアソン比:  $\nu = 0.3$

静止・動摩擦係数:  $\mu_s = 0.74, \mu_d = 0.47$

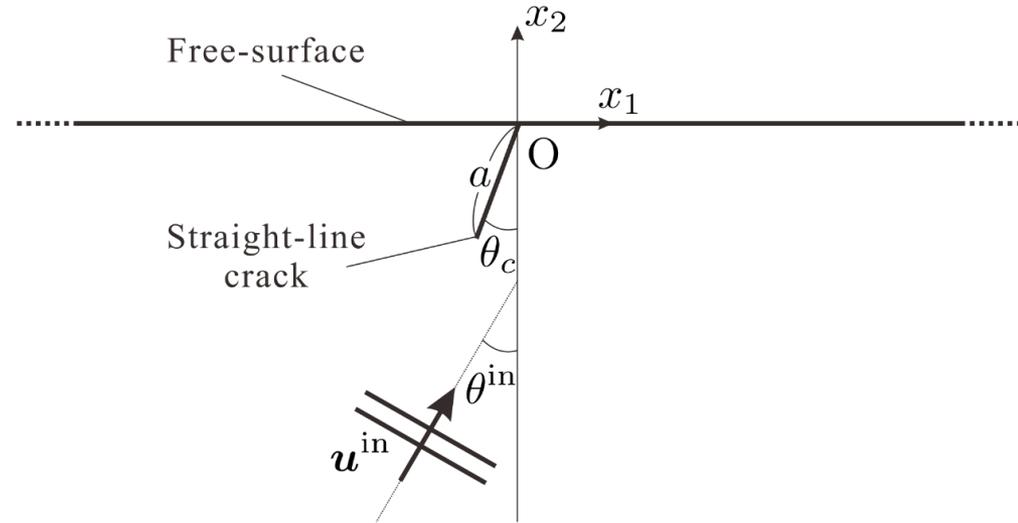
## 計算パラメータ

$$k_T a = (2\pi a f^{\text{in}}) / c_T = 0.5 \sim 5.5$$

$$g/u_0 = 0.0 \sim 5.0$$

$$\theta^{\text{in}} = 0^\circ \sim 75^\circ \text{ (15^\circ 間隔で変化)}$$

$$\theta_c = 0^\circ \sim 45^\circ \text{ (15^\circ 間隔で変化)}$$



## 15周期の正弦バースト波形を有する平面P波

$$\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \mathbf{p} \sin(2\pi \Lambda_L) H(\Lambda_L) H(15 - \Lambda_L)$$

$$\Lambda_L = f^{\text{in}} \left( t - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})}{c_L} \right)$$

$f^{\text{in}}$ : 中心周波数

$\mathbf{p}$ : 伝搬方向単位ベクトル

$u_0$ : 入射波の振幅

受信波として, 遠方散乱波を評価する

$$u_L^{\text{far}}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{8\pi x}} \underline{\Omega_L} \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_L} \right)$$

半無限弾性体のGreen関数

によって記述される遠方散乱振幅  
(き裂開口変位の速度を用いて計算)

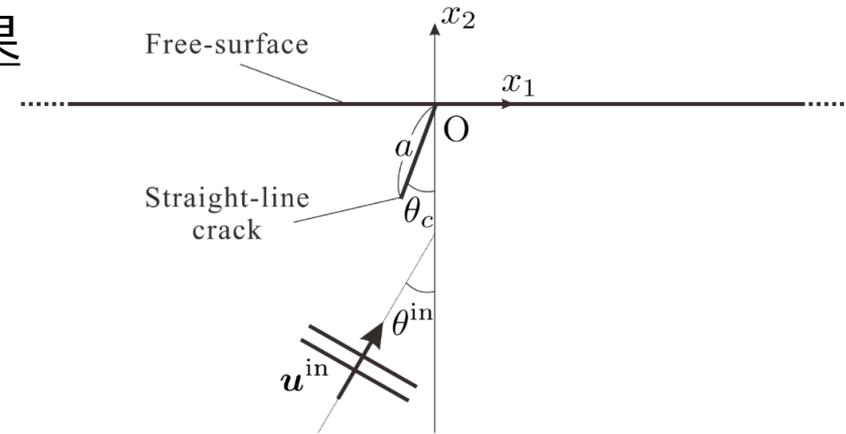
# 様々なパラメータに対する分調波確認可否

## 分調波の励起が確認されたかどうかの結果

$$k_T a = (2\pi a f^{\text{in}}) / c_T = 0.5 \sim 5.5$$

$$g / u_0 = 0.0 \sim 5.0$$

- X: 全く分調波が確認できなかった
- △: 少し分調波発生現象が確認できた
- : 明確な分調波発生現象が確認できた

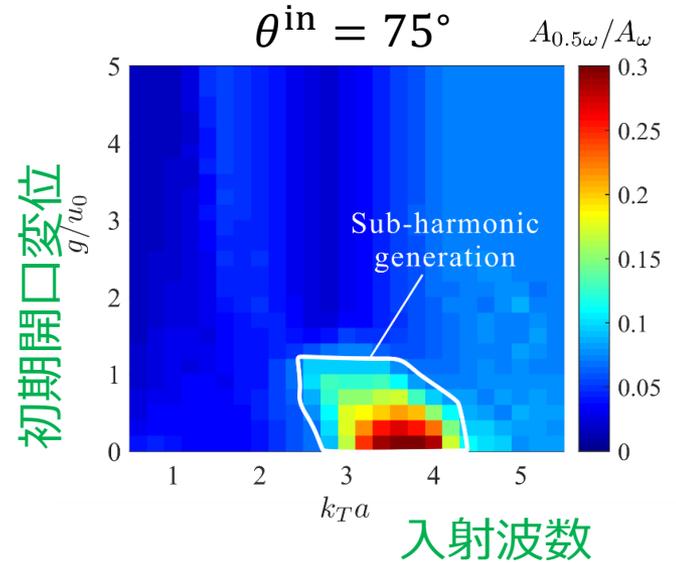
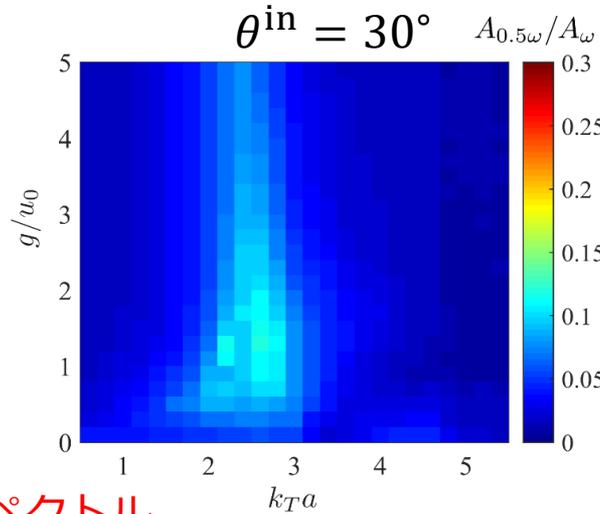


		$\theta_c$			
		$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
$\theta^{\text{in}}$	$0^\circ$	X	X	X	△
	$15^\circ$	X	X	X	X
	$30^\circ$	X	X	X	X
	$45^\circ$	X	X	X	△
	$60^\circ$	X	X	△	○
	$75^\circ$	X	X	△	○

次のスライドで詳しく説明を行う

# 分調波シミュレーション結果

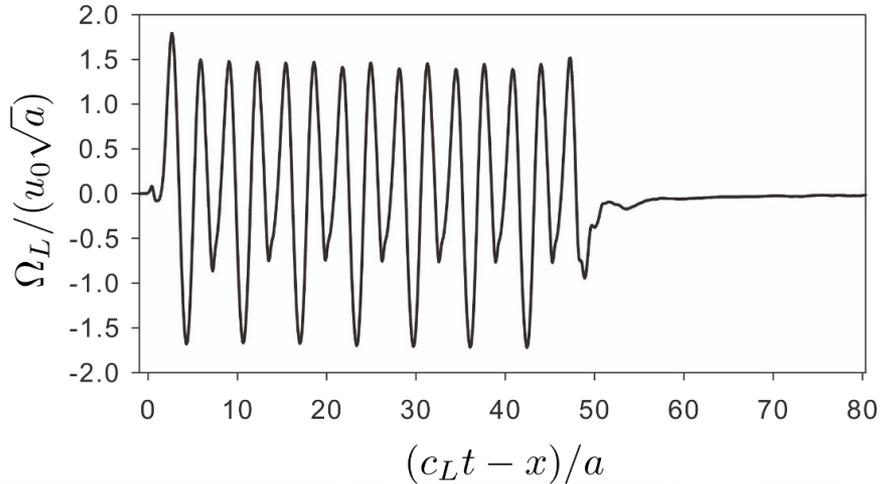
白線で囲まれた領域が分調波の発生現象を確認できた部分である



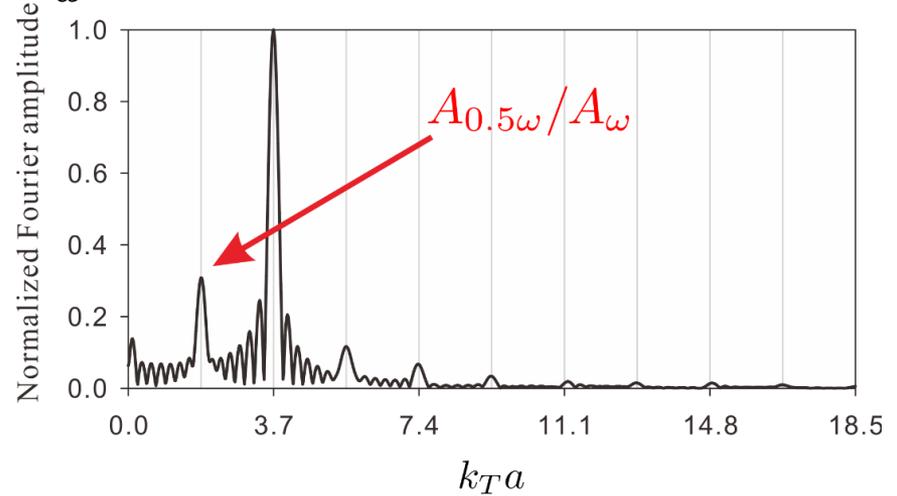
遠方散乱波形, フーリエスペクトル

$k_T a = 3.5, g/u_0 = 0.0, \theta^{\text{in}} = 75^\circ, \theta_c = 45^\circ$

後方散乱縦波に対する遠方散乱振幅



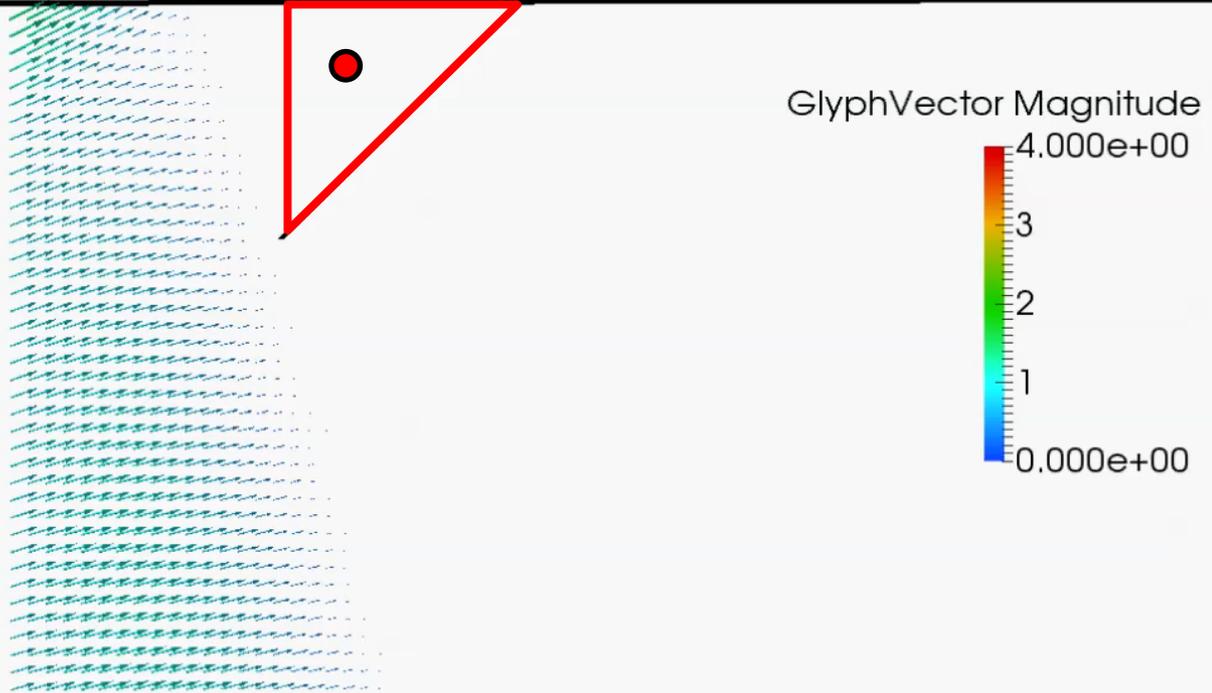
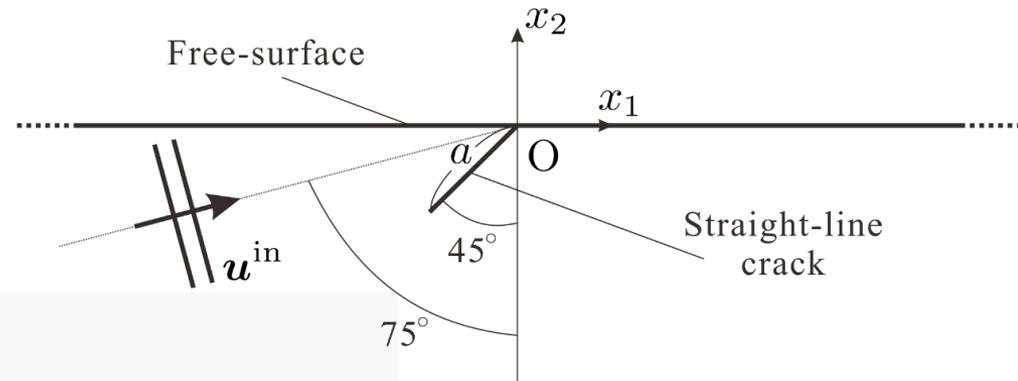
$A_\omega$  で正規化されたフーリエスペクトル



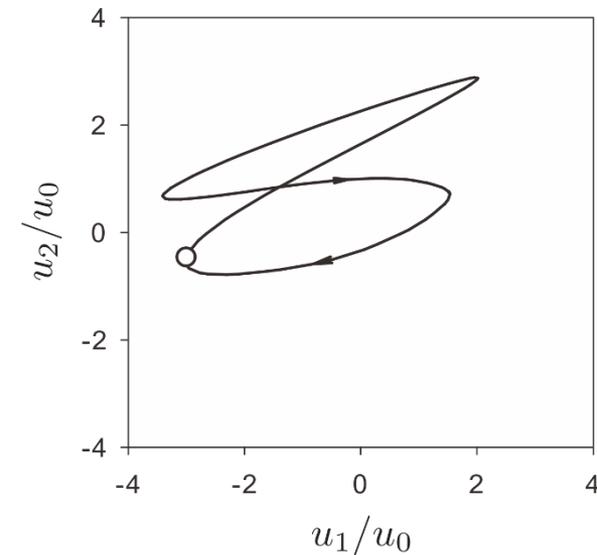
# 表面き裂周辺の変位場

全変位場をプロット  
 $k_T a = 3.7, g/u_0 = 0.0$

この部分の自由振動が大きく影響

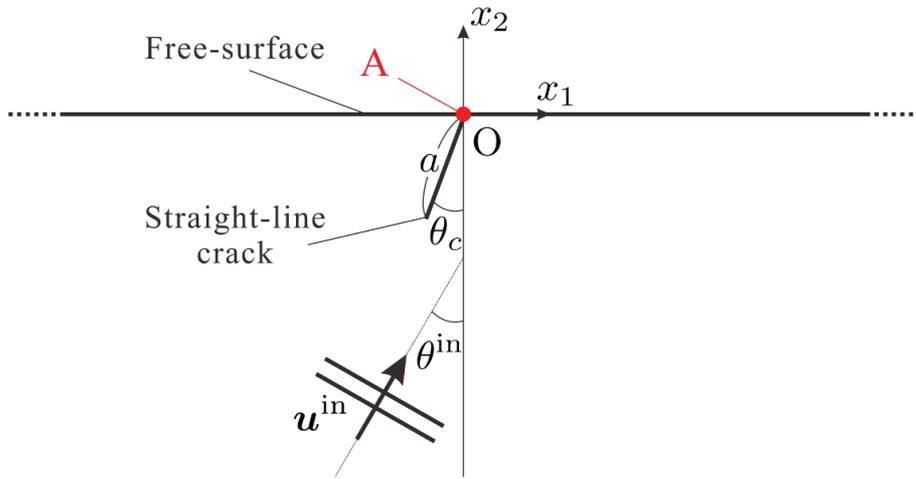


10~12周期の変位の履歴  
(座標 $(-0.35a, -0.175a)$ )



# き裂面の接触なし（線形系）の周波数応答

点Aにおけるノルムの値をプロット

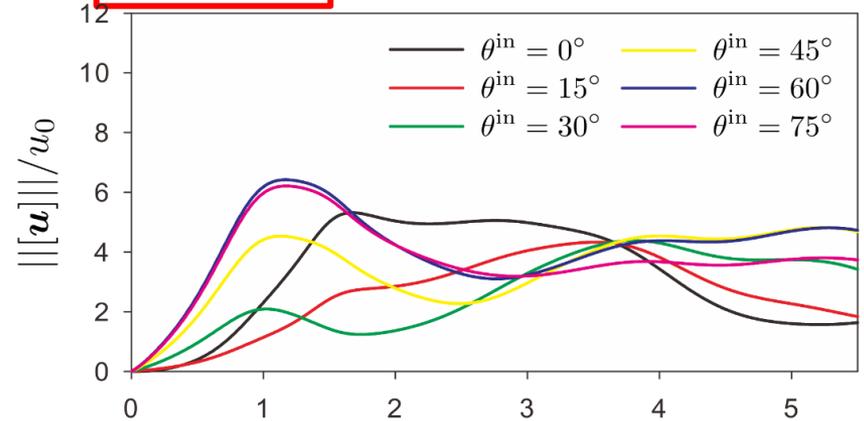


周波数域BEMによる線形な問題の  
周波数応答解析結果  
(き裂は常に開口している状態)

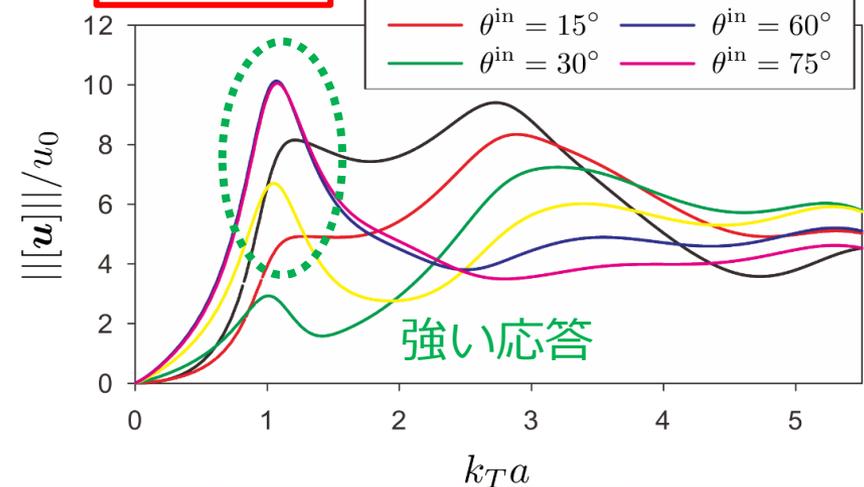
ノルムの定義

$$\|[\mathbf{u}]\| = \sqrt{|[u_1]|^2 + |[u_2]|^2}$$

$\theta_c = 30^\circ$



$\theta_c = 45^\circ$



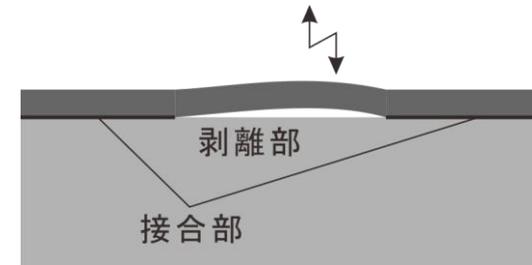
- 研究の背景
- 非定常シミュレーション
  - 解析手法の概要
  - 解析結果
- 定常シミュレーション
  - 解析手法の概要
  - 解析結果
- まとめ・今後の課題

# 既往研究による分調波の再現例

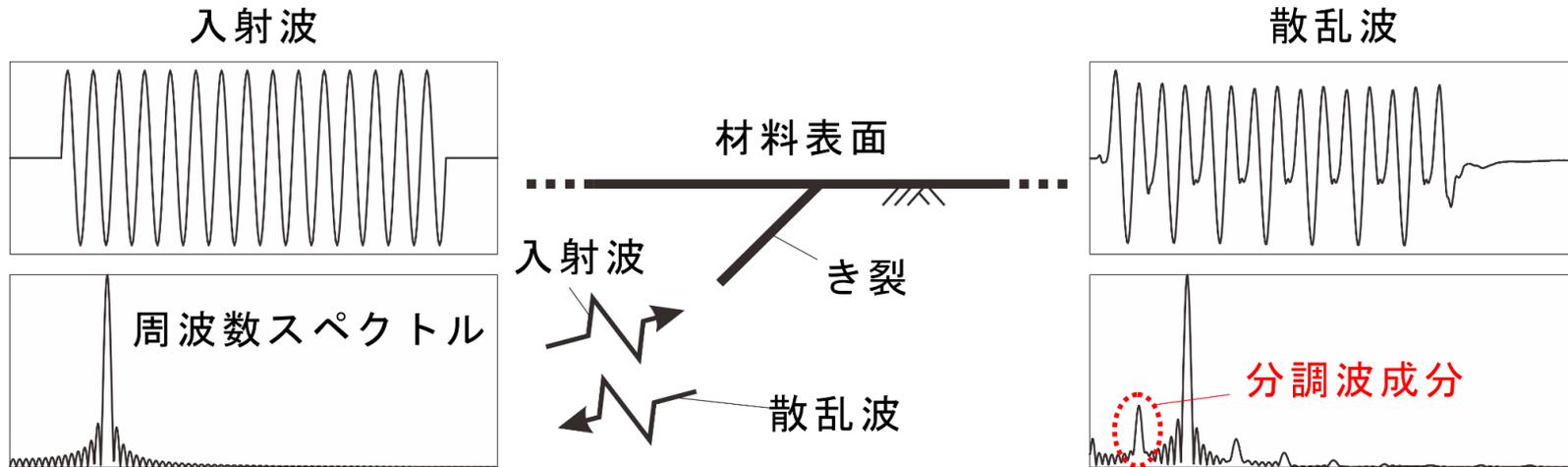
既往の時間領域解析による分調波発生現象の再現例：

- Sarens, B., Verstraeten, B., Glorieux, C., Kalogiannakis, G., Hemelrijck, D.V.: Investigation of contact acoustic nonlinearity in delaminations by shearographic imaging, laser doppler vibrometric scanning and finite difference modeling. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **57**, 1383–1395, 2010.
- Delrue, S., Abeele, K.V.D.: Three-dimensional finite element simulation of closed delaminations in composite materials. *Ultrasonics* **52**, 315–324, 2012.

薄い剥離部の接触を伴う振動による分調波共振



Maruyama, T., Saitoh T., Hirose, S.: Numerical study on sub-harmonic generation due to interior and surface breaking cracks with contact boundary conditions using time-domain boundary element method, *Int. J. Solids Struct.* **126–127**, 74–89, 2017.



# 定常解析の目的

- 非線形共振解は定常解として確かに存在するのか？  
→ 入射波を送信し続けたときの**定常解**を求める
- 共振現象が起こるパラメータ周辺ではどんな現象が起こるのか？  
→ 定常解の**安定性**を判定し、**安定・不安定を含めた解構造**を調べる

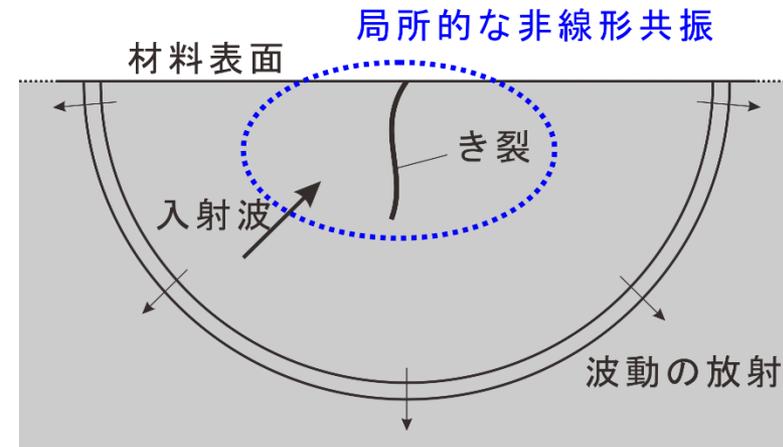


## 調和バランス-境界要素法の開発

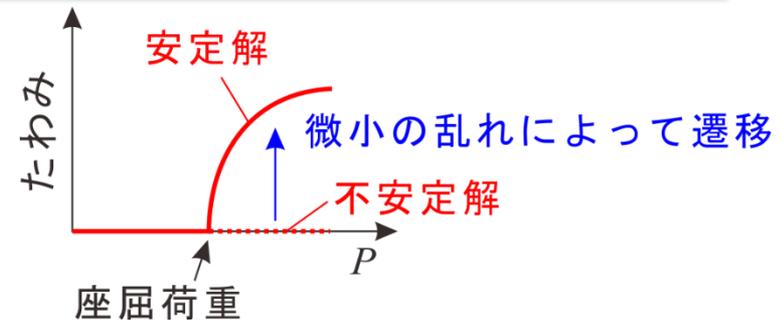
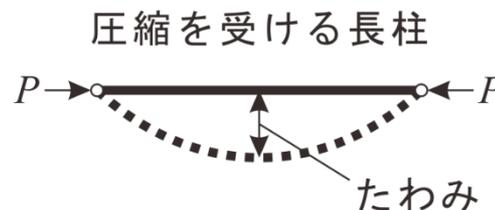
波動の放射を適切に扱える境界要素法

+

(強) 非線形定常解析のための調和バランス法

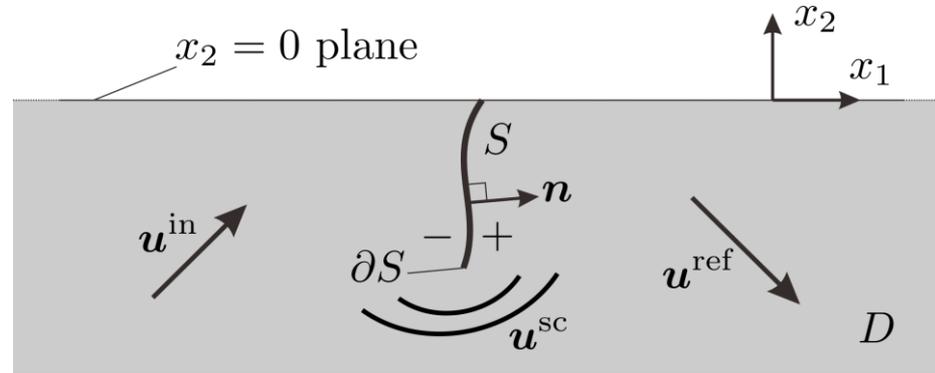


安定・不安定の例：  
(座屈の場合)  
本研究とは別の内容

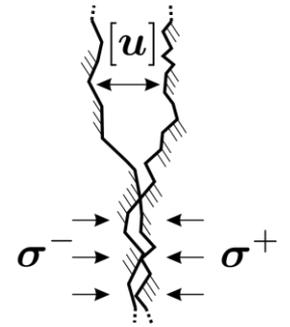


# 調和バランス-境界要素法の概要

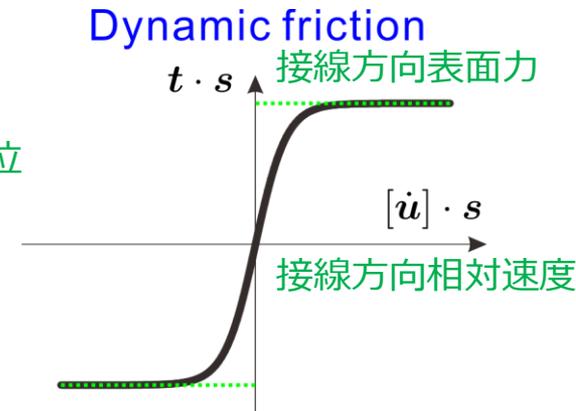
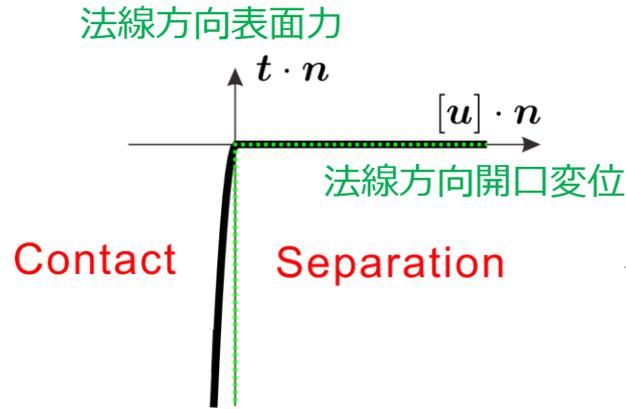
領域 $D$ は等方,  
均質な線形弾性体



き裂の微視的構造



- き裂面の開閉と摩擦をモデル化
- 数値解析のために滑らかな関数で正則化 (近似)



## 解析の概要

- 連続波を入射波として設定
- 時間が十分に経過した後の定常状態を解析

# 調和バランス-境界要素法の定式化

時間域境界積分方程式 (**放射条件を厳密に満足**)

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) dS_x = \int_S \psi(\mathbf{x}) \{ \mathbf{t}^{\text{free}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{t}^{\text{st}}(\mathbf{x}) \} dS_x \\ + \int_0^t \int_S \psi(\mathbf{x}) \text{p.f.} \int_S \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \{ \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau) - [\mathbf{u}^{\text{st}}](\mathbf{y}) \} dS_y dS_x d\tau.$$

1. 未知量 (開口変位 $[\mathbf{u}]$ , 表面力 $\mathbf{t}$ ) を**有限のFourier級数**で仮定 (時間方向)

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} \left\{ \mathbf{a}^{(\frac{n}{\kappa})}(\mathbf{x}) \cos\left(\frac{n\omega^{\text{in}}t}{\kappa}\right) + \mathbf{b}^{(\frac{n}{\kappa})}(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{n\omega^{\text{in}}t}{\kappa}\right) \right\} \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mathbf{c}^{(0)}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} \left\{ \mathbf{c}^{(\frac{n}{\kappa})}(\mathbf{x}) \cos\left(\frac{n\omega^{\text{in}}t}{\kappa}\right) + \mathbf{d}^{(\frac{n}{\kappa})}(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{n\omega^{\text{in}}t}{\kappa}\right) \right\}$$

2. 十分な時間経過後の意味で  $t \rightarrow \infty$  なる極限を考える

$\mathbf{K}$  : 半無限Green関数に対する超特異積分核,  $\psi$  : Galerkin法の重み関数

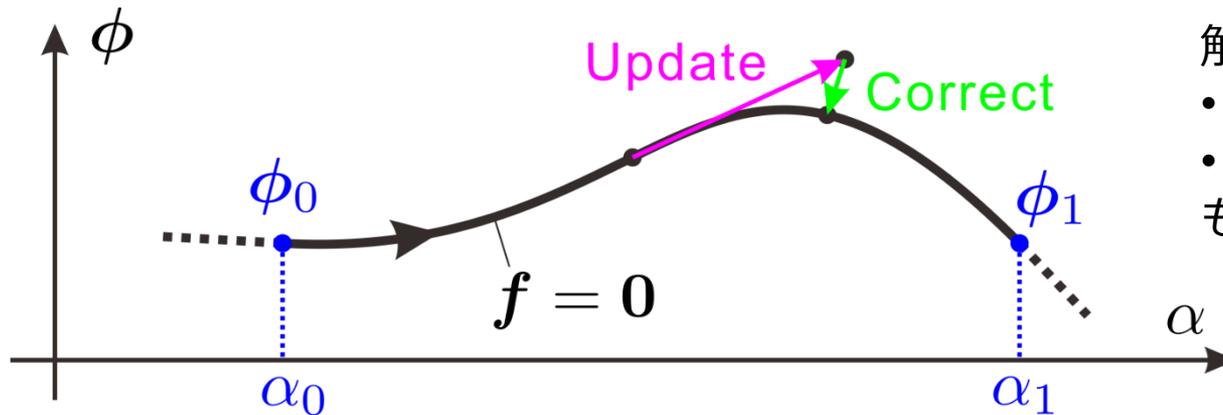
# 連立非線形方程式とその解法

帰着される連立非線形方程式：

$$\begin{cases} f^{(0)}(\phi, \alpha) \\ f^{(1)}(\phi, \alpha) \\ \vdots \\ f^{(2N_h)}(\phi, \alpha) \end{cases} = \mathbf{0}, \quad \phi = \left( \mathbf{a}^{(0)}, \dots, \mathbf{a}^{(\frac{N_h}{\kappa})}, \mathbf{b}^{(\frac{1}{\kappa})}, \dots, \mathbf{b}^{(\frac{N_h}{\kappa})} \right)$$

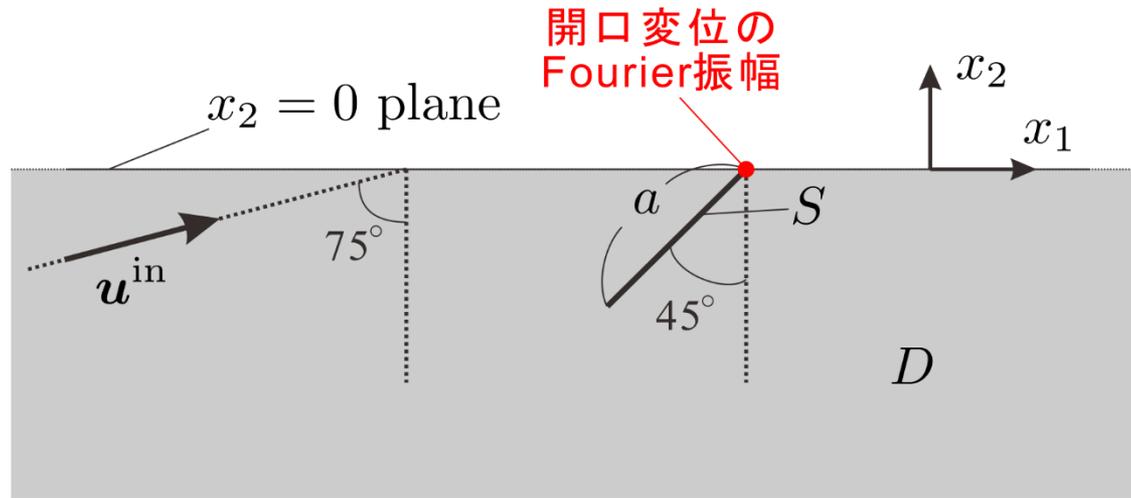
静弾性問題に対応  
未知量ベクトル（開口変位のFourier係数）  
周波数域動弾性問題に対応（複数の周波数）

何らかの物理パラメータ $\alpha$ を変化させたときの解 $\phi$ を追跡する。  
(Numerical Continuation Method)



解曲線の  
・ ターンバック  
・ 分岐  
も追跡によって調べる

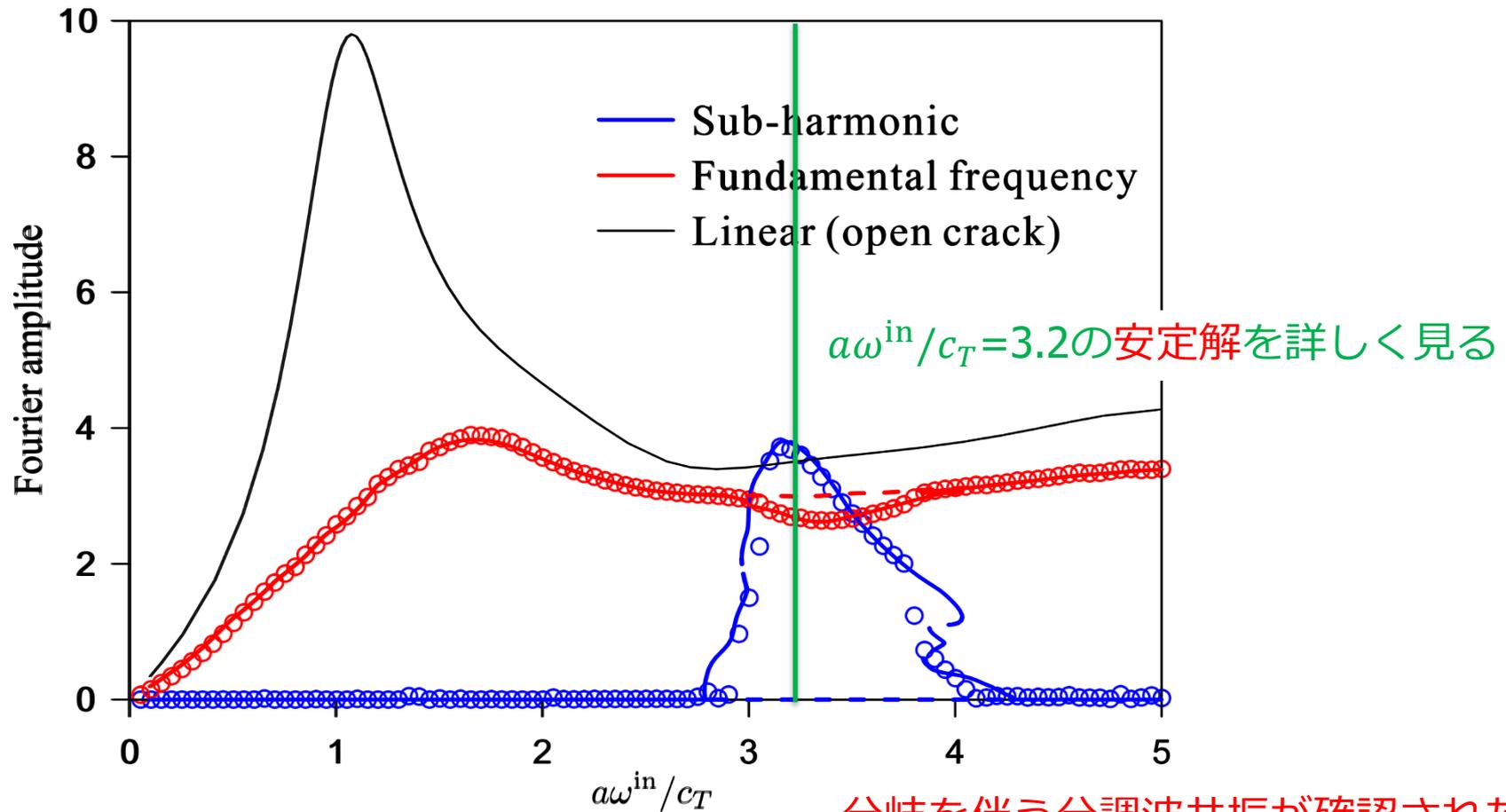
# 数値解析モデル



ポアソン比： $\nu = 0.3$ ，動摩擦係数： $\mu_d = 0.57$ ，  
正則化パラメータ： $\gamma_1 = 50$ ， $\gamma_2 = 2500$ ，静的な場： $[\mathbf{u}^{\text{st}}] = \mathbf{t}^{\text{st}} = \mathbf{0}$ ，  
考慮する分調波の次数： $\kappa = 2$ （1/2次の分調波を考慮），  
Fourier級数の打ち切り次数： $N_h = 14$ （7次の高調波まで考慮），  
入射波 $\mathbf{u}^{\text{in}}$ ：振幅 $u_0$ ，角周波数 $\omega^{\text{in}}$ の平面P波

入射角周波数 $\omega^{\text{in}}$ を変化させたときの定常解を追跡する

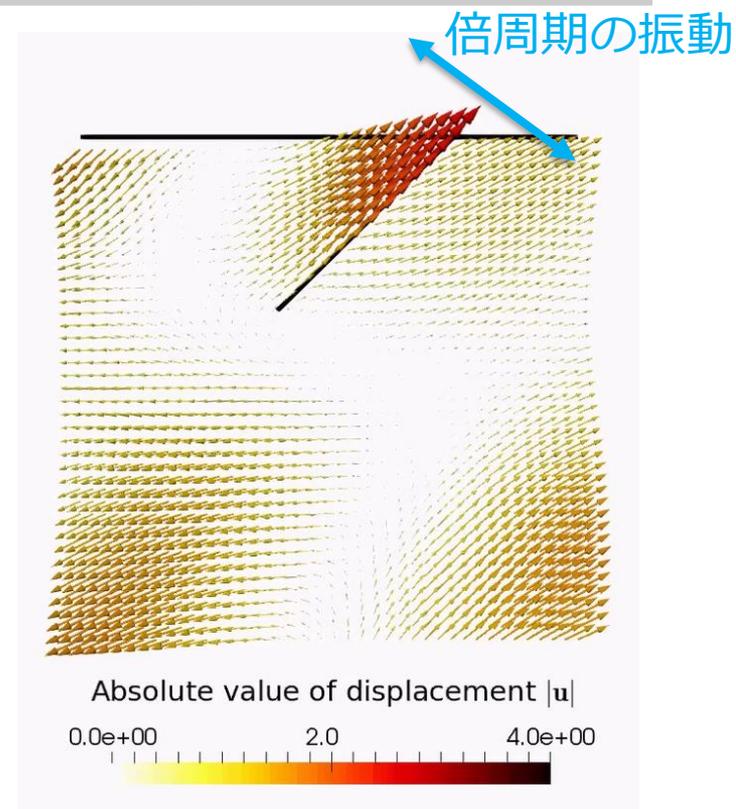
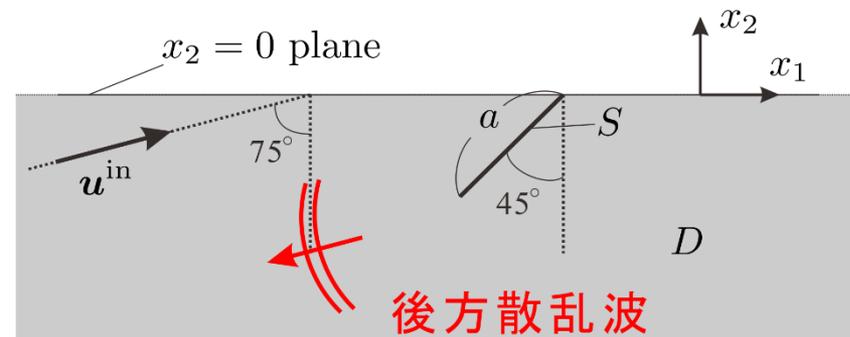
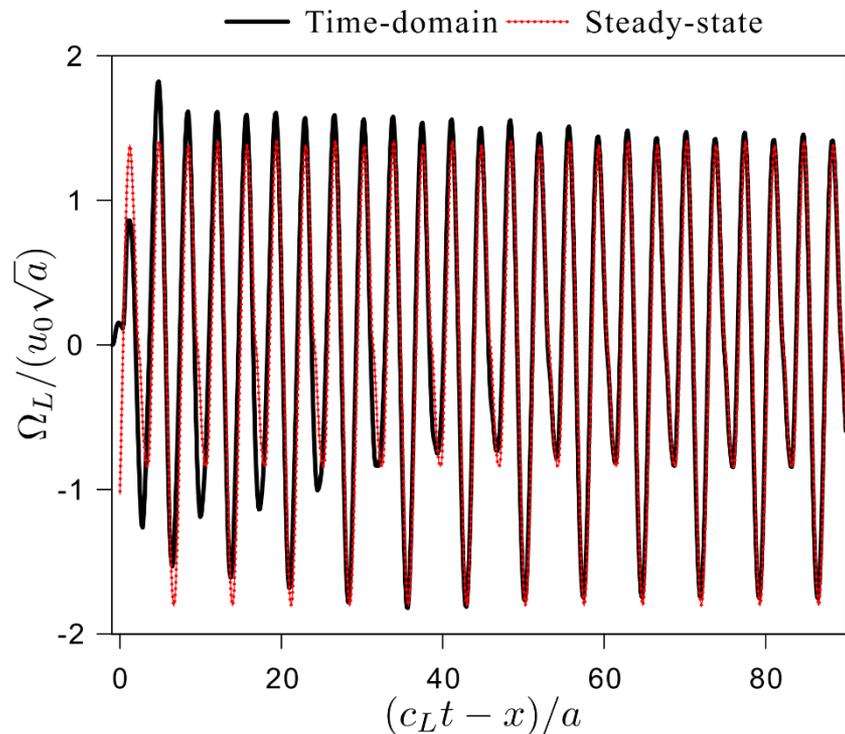
# き裂付け根における開口変位のFourier振幅



実線：安定解  
破線：不安定解

○：非定常解析結果から求めたFourier振幅

# 後方散乱波形 ( $a\omega^{\text{in}}/c_T=3.2$ )



遠方における散乱P波の振幅

$$u_L^{\text{sc;far}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi|\mathbf{x}|}} \Omega_L \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} \right)$$

- まとめ
  - 閉口したき裂による散乱問題の非定常解析，定常解析を行った．
  - 数値シミュレーションによって高調波・分調波の発生を再現できた．
  - 分調波は非線形共振の一種である分調波共振によって起こりうることが示唆された．
- 今後の課題
  - 大規模問題のための計算手法の効率化
  - 計測実験との比較

ご清聴ありがとうございました